Signály a soustavy – X37SAS, 37SAS

URL: http://radio.feld.cvut.cz/courses/X37SAS/

- Vyjádření spojitých a diskrétních signálů v časové i kmitočtové oblasti.
- Charakteristiky systémů.
- Transformace signálů - průchod signálu systémem.
- Vzorkování signálu.
- Vyjádření pásmového signálu pomocí komplexní obálky.
- Úvod do náhodných signálů.

Osnova přednášek

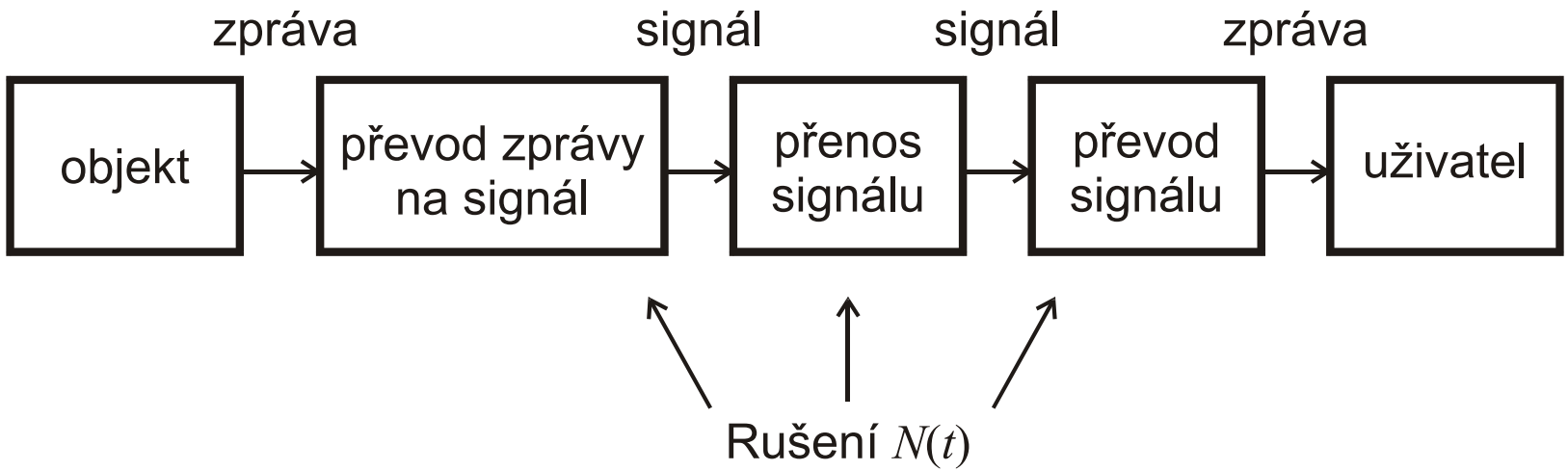
1. Klasifikace signálů, signál ve spojitém a v diskrétním čase, časové charakteristiky
2. Vzájemná energie a výkon, ortogonální signály, korelační funkce. Zvláštní případy signálů (singulární signály)
3. Rozklad signálu do ortogonálního systému funkcí, Fourierova řada spojitých a diskrétních signálů
4. Spektrum neperiodických signálů, energetické a výkonové spektrum, vztah k autokorelační funkci
5. Souvislost mezi spektry spojitých a diskrétních signálů, spektrum a Fourierova řada
6. Diskrétní Fourierova transformace, rychlé algoritmy, použití pro přepočet mezi signálem a spektrem
7. Klasifikace soustav ve spojitém a diskrétním čase, lineární časově invariantní soustava, systémová funkce
8. Spektrální reprezentace lineárních časově invariantních soustav, přenosová funkce
9. Vzorkování signálů, interpolace vzorků signálu, vztah mezi soustavami ve spojitém a diskrétním čase
10. Pásmové signály a jejich reprezentace, komplexní obálka, ortogonální reprezentace, obálka a fáze
11. Základní analogové modulační metody - amplitudové a úhlové modulace
12. Základní digitální modulační metody, příklady modulací
13. Náhodné jevy, náhodné veličiny, distribuční funkce, střední hodnota, rozptyl, kovariance
14. Náhodné signály a jejich charakteristiky, stacionarita a ergodicita. Bílý šum

http://www.feld.cvut.cz/education/bk/predmety/01/44/p14429.html

Definice pojmů

- Signál:
  - fyzikální veličina, která je funkcí času
  - nosič informace
- Soustava:
  - prostředí, kterým se přenáší informace pomocí signálů
  - „Množina prvků vhodným způsobem spojených a vzájemně na sebe působících pod vlivem vnějších a vnitřních signálů za účelem splnění požadované funkce.“

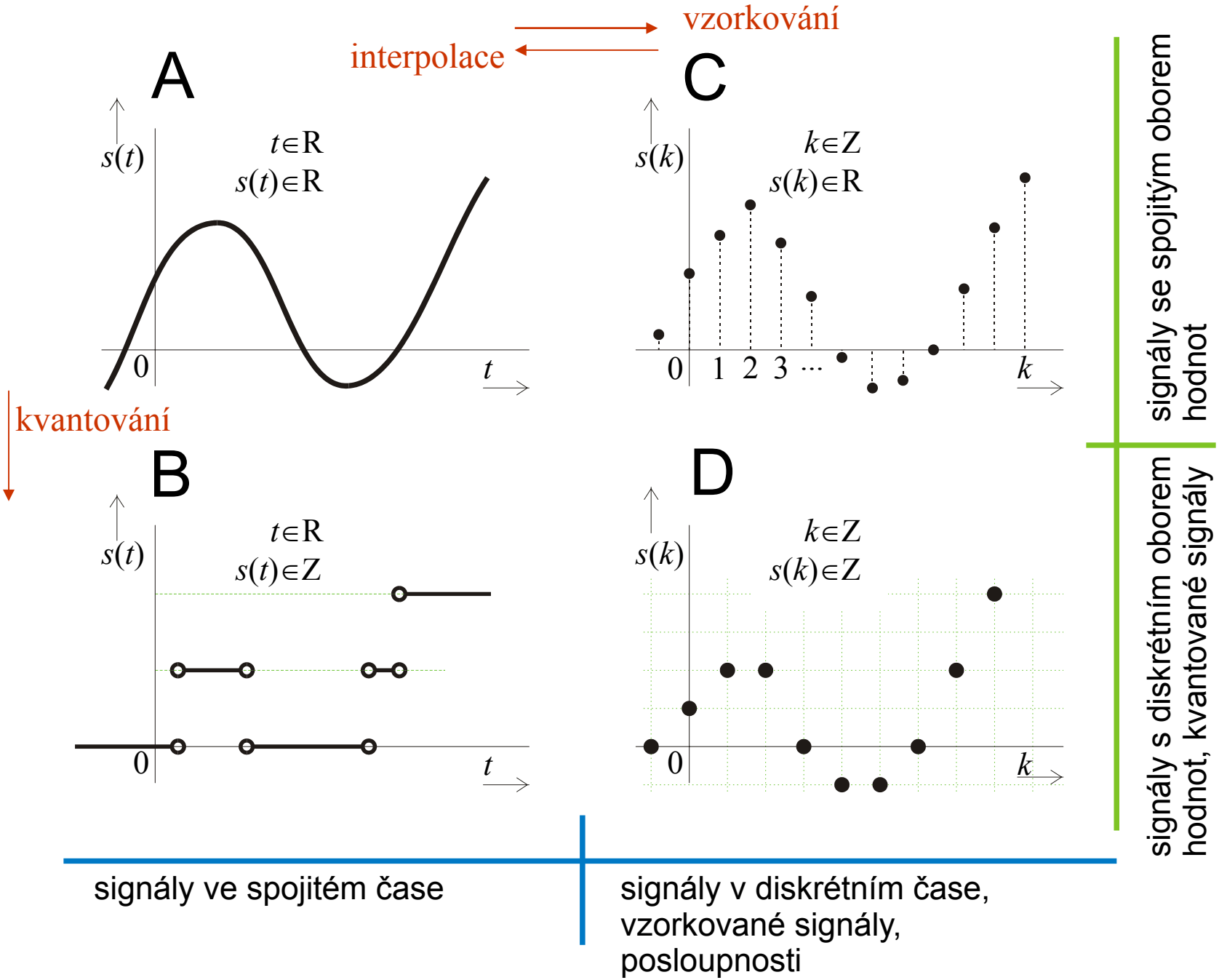
Soustava



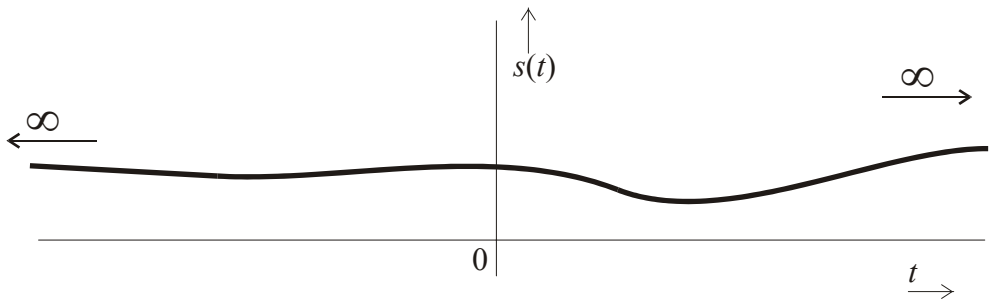
- přenáší informaci o stavu objektu
- pokud je přítomno rušení, informace je zkreslena

Klasifikace signálů

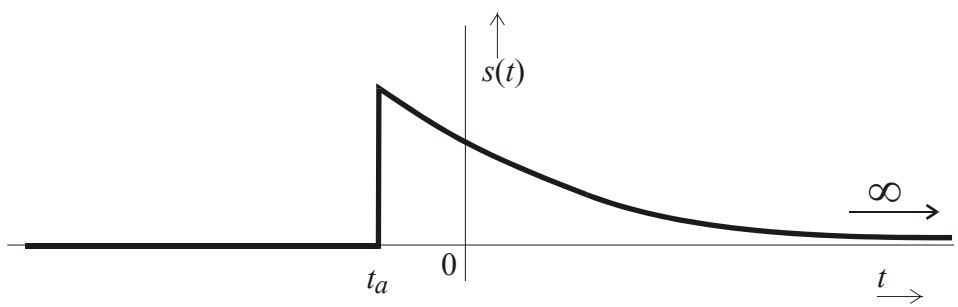
- Deterministické nebo stochastické
- Se spojitým nebo diskrétním časem
- Se spojitým nebo diskrétním intervalem hodnot
- Nefinitní – finitní, nekauzální - kauzální
- Energetické nebo výkonové
- …


vzorkování
interpolace
kvantování
A
$s(t)$
$t \in R$
$s(t) \in R$
0
t
C
$s(k)$
$k \in Z$
$s(k) \in R$
0 1 2 3 ...
k
B
$s(t)$
$t \in R$
$s(t) \in Z$
0
t
D
$s(k)$
$k \in Z$
$s(k) \in Z$
0
k
signály se spojitým oborem hodnot
signály s diskrétním oborem hodnot, kvantované signály
signály ve spojitém čase
signály v diskrétním čase, vzorkované signály, posloupnosti

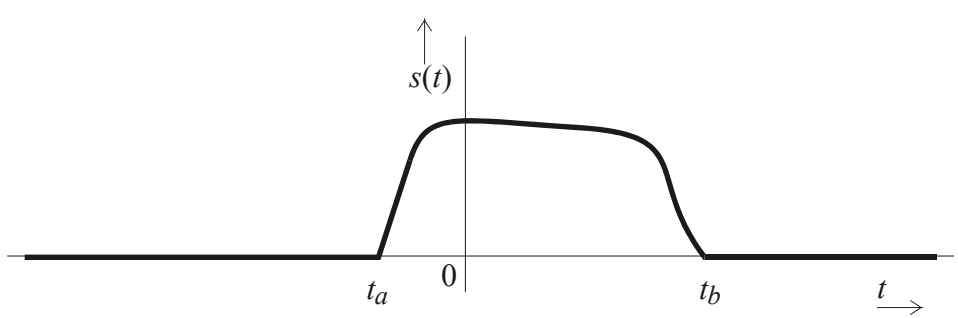
Časové omezení signálu



nekauzální, nefinitní



kauzální, nefinitní



kauzální, finitní

Základní charakteristiky signálu

Střední hodnota (stejnosměrná složka):

$$s_{ss} = \mathrm{Av}\left[s(t)\right] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} s(t)\,\mathrm{d}t$$

$$s_{ss} = \mathrm{Av}\left[s(k)\right] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} s(k)$$

Střední hodnota periodických signálů se s výhodou počítá z jedné periody, není třeba pracovat s limitou

$$\mathrm{Av}\left[s(t)\right] = \frac{1}{T_0} \int_{(T_0)} s(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{Av}\left[s(k)\right] = \frac{1}{N_0} \sum_{k=k_0}^{k_0+N_0-1} s(k)$$

Základní charakteristiky signálu

Energie:

$$\boxed{E = \int_{-\infty}^{\infty} p(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\cdot s^*(t)\,\mathrm{d}t}$$

Okamžitý výkon:

$$\boxed{p(t) = |s(t)|^2 = s(t)\cdot s^*(t)}$$

Střední výkon:

$$\boxed{\begin{aligned} P &= \mathrm{Av}\left[p(t)\right] = \mathrm{Av}\left[|s(t)|^2\right] = \mathrm{Av}\left[s(t)s^*(t)\right] \\ &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} s(t)s^*(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}}$$

Efektivní hodnota:

$$\boxed{s_{ef} = \sqrt{P}}$$

... analogicky pro signál v diskrétním čase

Energie:

$$\boxed{E = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|s(k)\right|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(k) \cdot s^*(k)}$$

Okamžitý výkon: $p(k) = \left|s(k)\right|^2 = s(k) \cdot s^*(k)$

Střední výkon:

$$\boxed{\begin{aligned} P &= \mathrm{Av}\left[p(k)\right] = \mathrm{Av}\left[\left|s(k)\right|^2\right] = \mathrm{Av}\left[s(k)s^*(k)\right] \\ &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} s(k)s^*(k) \end{aligned}}$$

Energetické a výkonové signály

- Energetické signály
  - pro hodnocení velikosti používáme energii
  - energie je konečná, střední výkon je nulový
  - *Pozn.: nemusí být finitní*
- Výkonové signály
  - jejich energie je nekonečná, střední výkon nenulový (zpravidla konečný)
  - pro hodnocení velikosti používáme střední výkon
  - *nefinitní, typický příklad – signály periodické*

Vzájemná energie

Energie součtového signálu $s(t) = s_1(t) + s_2(t)$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left| s_1(t) + s_2(t) \right|^2 \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \left(s_1(t) + s_2(t) \right) \cdot \left(s_1^*(t) + s_2^*(t) \right) \mathrm{d}t =$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_1^*(t) \mathrm{d}t}_{E_1} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2^*(t) \mathrm{d}t}_{E_{12}} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} s_1^*(t) s_2(t) \mathrm{d}t}_{E_{21}} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} s_2(t) s_2^*(t) \mathrm{d}t}_{E_2} =$$

$$= E_1 + E_2 + \boxed{E_{12} + E_{21}}$$

vzájemná energie

Energie součtového signálu obecně není rovna součtu energií složek.

Vzájemná energie:

$$\boxed{E_{12} = E_{21}^* = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2^*(t) \mathrm{d}t}$$

Vzájemná energie a vzájemný výkon

Vzájemná energie:

$$\boxed{E_{12} = E_{21}^{*} = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)\, s_2^{*}(t)\, \mathrm{d}t}$$

Vzájemný (střední) výkon:

$$\boxed{P_{12} = P_{21}^{*} = \mathrm{Av}\left[s_1(t)\, s_2^{*}(t)\right] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} s_1(t)\, s_2^{*}(t)\, \mathrm{d}t}$$

Pokud $s_1(t) = s_2(t)$

$$E_{12} = E_{21} = E$$

$$P_{12} = P_{21} = P$$

...pro signály v diskrétním čase zavedeno analogicky

Vzájemná energie:

$$\boxed{E_{12} = E_{21}^{*} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_1(k) \cdot s_2^{*}(k)}$$

Vzájemný (střední) výkon:

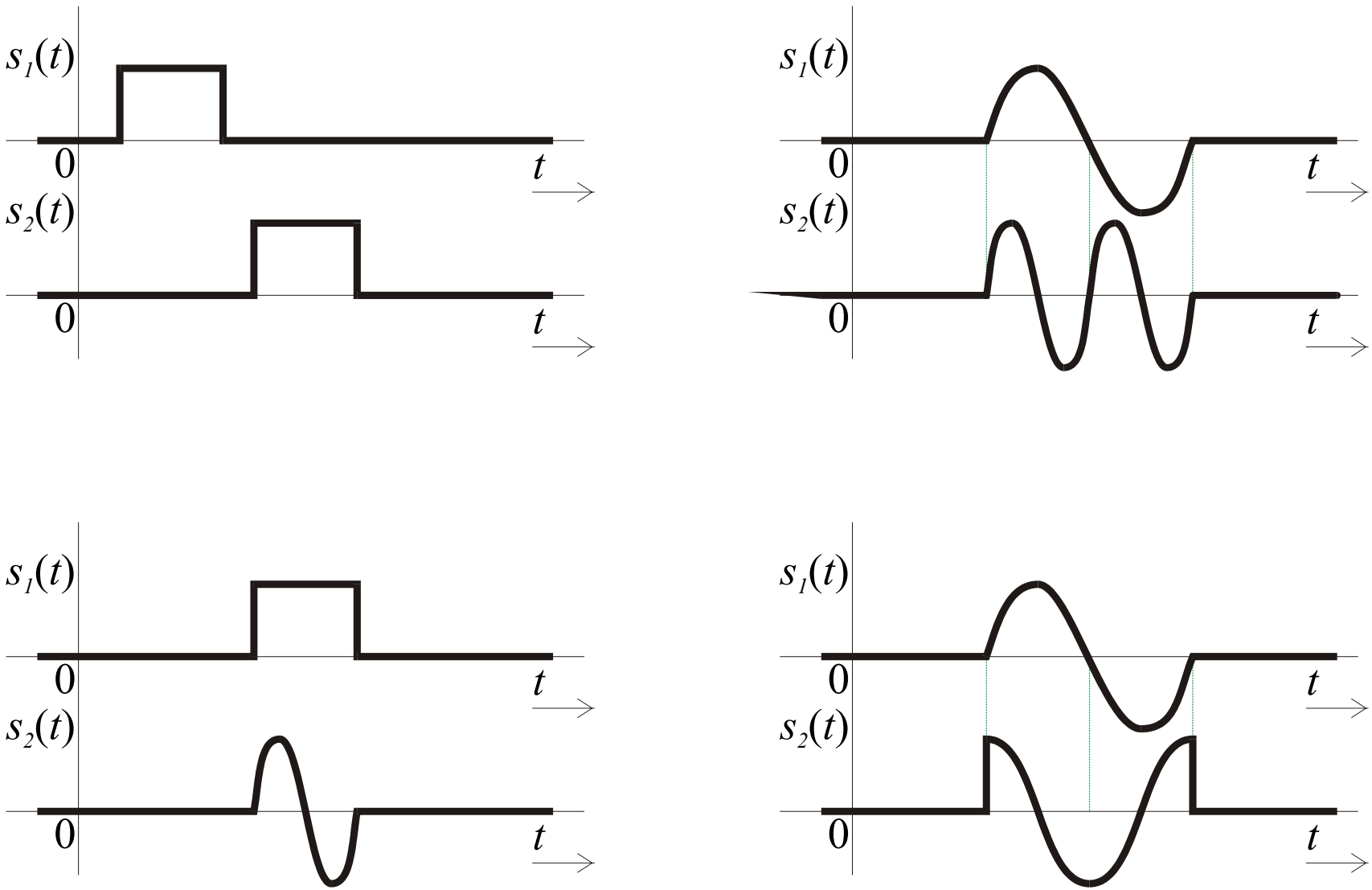
$$\boxed{P_{12} = P_{21}^{*} = \mathrm{Av}\left[s_1(k)\, s_2^{*}(k)\right] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} s_1(k)\, s_2^{*}(k)}$$

Ortogonální signály

- Signály jsou vzájemně ortogonální, pokud $\boxed{E_{12} = E_{21} = 0}$ (pro energetické signály) nebo $\boxed{P_{12} = P_{21} = 0}$ (pro výkonové signály).
- Praktický význam (přibližně): ortogonální signály lze vzájemně oddělit, lze je tedy použít pro přenos nezávislých informací ve společném prostředí (sdílení kom. kanálu).
- Význam E_{12}, P_{12} jako kriteria „podobnosti“ signálů, detekce přítomnosti hledané složky signálu.
- Interval ortogonality I

$$E_{12} = \int_{(I)} s_1(t) \cdot s_2^*(t) \, \mathrm{d}t = 0$$

Příklady ortogonálních signálů



Korelační funkce

Vzájemná korelační funkce (vzájemná energie nebo výkon mezi vzájemně posunutými signály)

$$\boxed{R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t+\tau)\, s_2^*(t)\, \mathrm{d}t} \qquad R_{12}(0) = E_{12}$$

Autokorelační funkce (vzájemná energie nebo výkon mezi vzájemně posunutými kopiemi téhož signálu)

$$\boxed{R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t+\tau)\, s^*(t)\, \mathrm{d}t} \qquad R(0) = E$$

Korelační funkce

Vzájemná korelační funkce (vzájemná energie nebo výkon mezi vzájemně posunutými signály)

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t+\tau)\, s_2^*(t)\, \mathrm{d}t \qquad R_{12}(\tau) = \mathrm{Av}\left[s_1(t+\tau)\, s_2^*(t) \right]$$

$$R_{12}(m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_1(k+m) \cdot s_2^{\,*}(k) \qquad R_{12}(m) = \mathrm{Av}\left[s_1(k+m)\, s_2^*(k) \right]$$

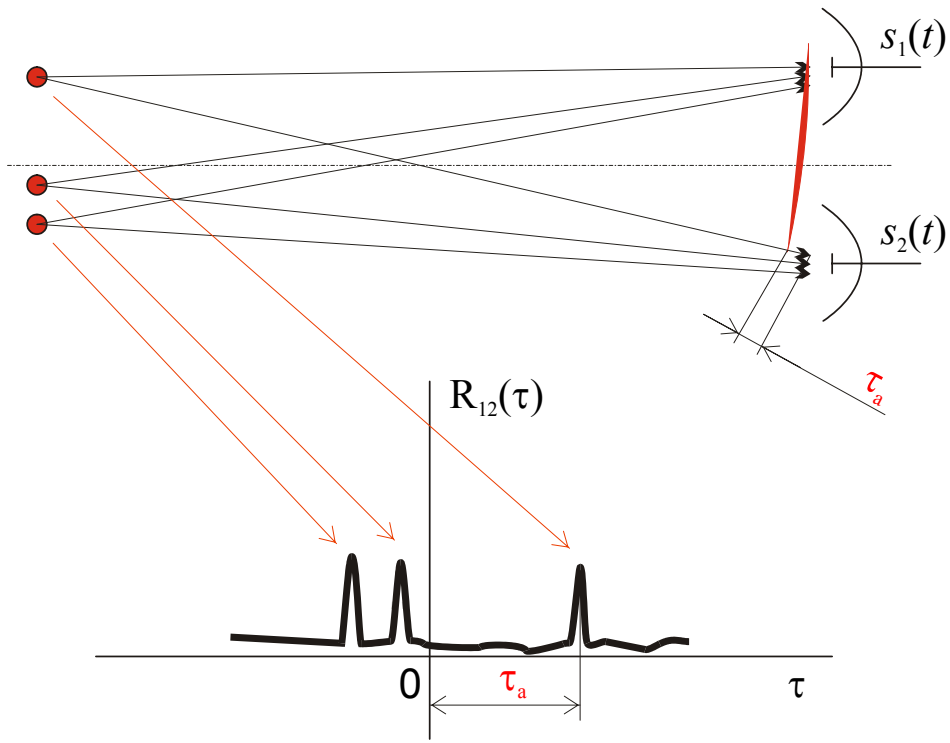
Autokorelační funkce (vzájemná energie nebo výkon mezi vzájemně posunutými kopiemi téhož signálu)

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t+\tau)\, s^*(t)\, \mathrm{d}t \qquad R(\tau) = \mathrm{Av}\left[s(t+\tau)\, s^*(t) \right]$$

$$R(m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(k+m) \cdot s^*(k) \qquad R(m) = \mathrm{Av}\left[s(k+m)\, s^*(k) \right]$$

Význam korelační funkce

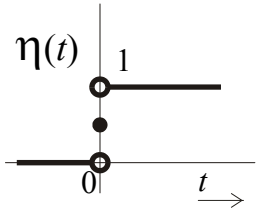
- Nalezení společné složky ve dvou signálech



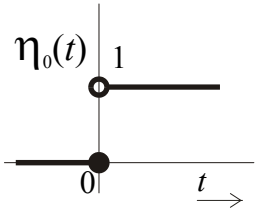
- Určení zpoždění kopie signálu oproti předloze (synchronizace)
- Korelační příjem signálu
- Nalezení periodické složky v signálu

Jednotkový skok

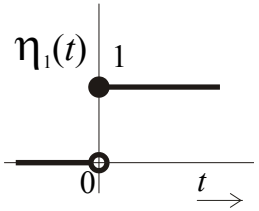
$$\eta(t)=\begin{cases}0; & t<0\\ \frac{1}{2}; & t=0\\ 1; & t>0\end{cases}$$



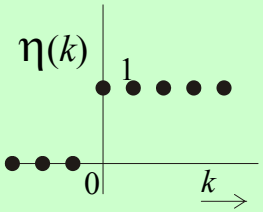
$$\eta_0(t)=\begin{cases}0; & t\le 0\\ 1; & t>0\end{cases}$$



$$\eta_1(t)=\begin{cases}0; & t<0\\ 1; & t\ge 0\end{cases}$$

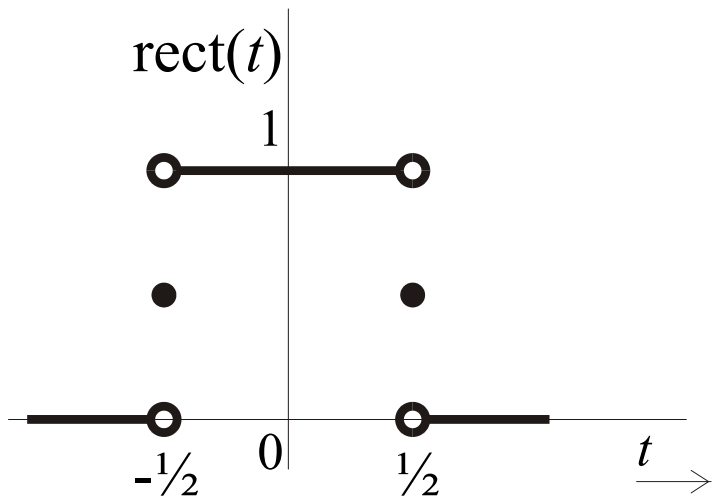


$$\eta(k)=\begin{cases}0; & k<0\\ 1; & k\ge 0\end{cases}$$

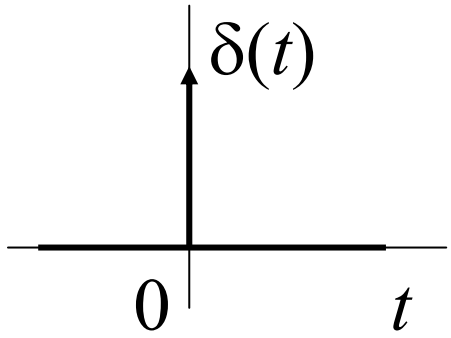


Obdélníkový impuls

$$\mathrm{rect}(t) = \eta\left(t + \frac{1}{2}\right) - \eta\left(t - \frac{1}{2}\right) = \begin{cases} 0; & |t| > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}; & |t| = \frac{1}{2} \\ 1; & |t| < \frac{1}{2} \end{cases}$$



Diracův impuls



- „Derivace“ jednotkového skoku
- Má jednotkovou plochu, nulovou šířku, „nekonečnou“ amplitudu
- Platí vzorkovací vlastnost (podmínkou je spojitost signálu $s(t_0)$ v bodě t_0

$$\int_{t_a}^{t_b} s(t)\cdot\delta(t-t_0)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} s(t_0)\,; & t_0 \in (t_a, t_b) \\ 0\,; & t_0 \notin \langle t_a, t_b \rangle \\ s(t_0)\cdot\eta(0)\,; & t_0 = t_b \\ s(t_0)\cdot(1-\eta(0))\,; & t_0 = t_a \end{cases}$$

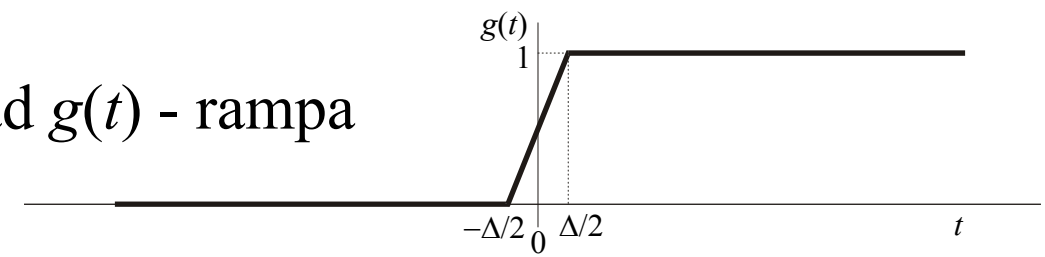
Diracův impuls

Namísto jednotkového skoku derivujeme <u>spojitou</u> funkci $g(t)$, která se k jednotkovému skoku limitně blíží (energie rozdílu je nulová)

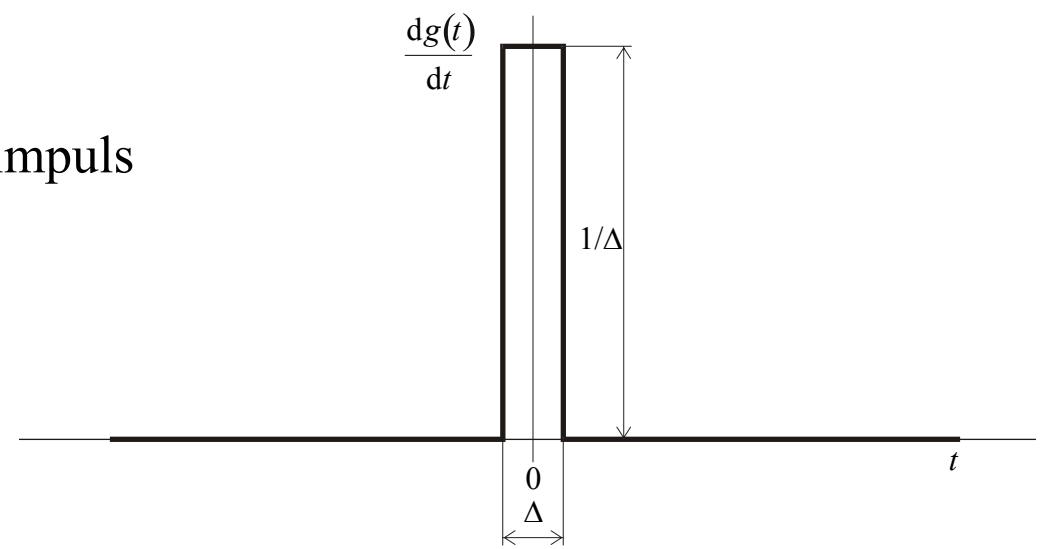
$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left| g(t) - \eta(t) \right|^2 \mathrm{d}t \to 0$$

Jednoduchý speciální případ $g(t)$ - rampa

(lze zvolit i libovolnou jinou spojitou aproximaci jednotkového skoku $g(t)$)



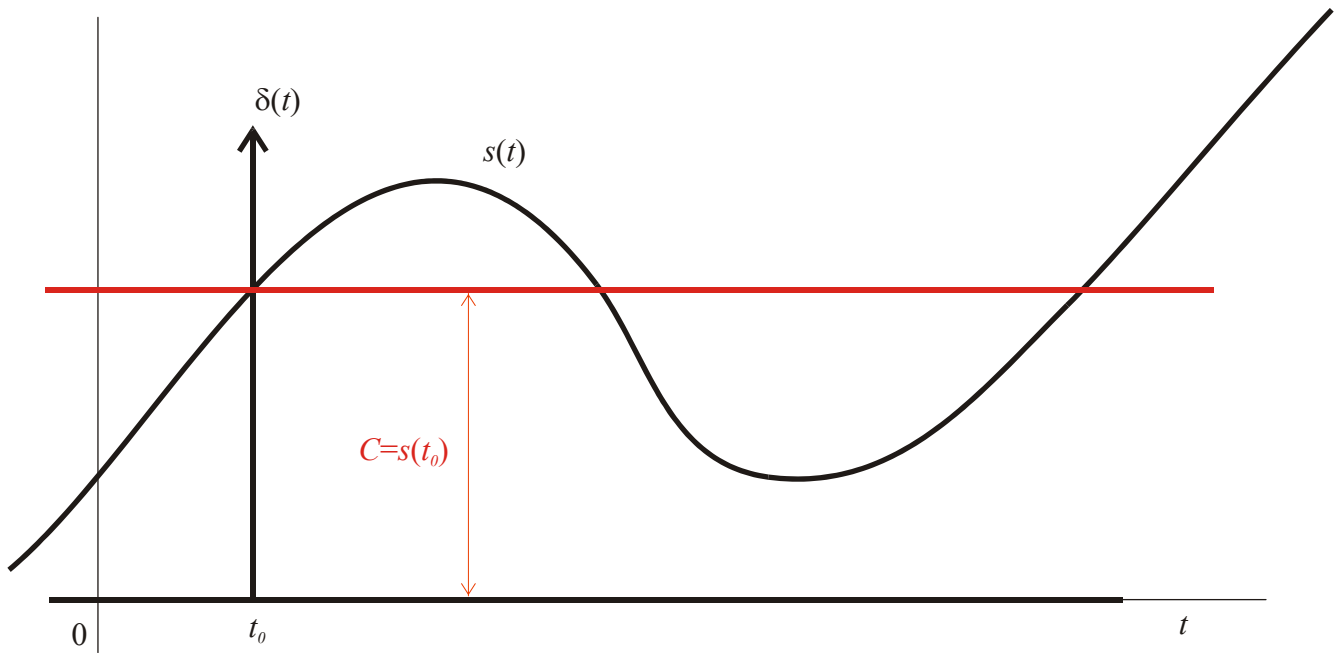
Derivací rampy je obdélníkový impuls o jednotkové ploše, limitním přechodem $\Delta \to 0$ obdržíme $\delta(t)$



Vzorkovací vlastnost Diracova impulsu

$$\int_{t_a}^{t_b} s(t)\cdot\delta(t-t_0)\,\mathrm{d}t = \int_{t_a}^{t_b} C\cdot\delta(t-t_0)\,\mathrm{d}t = \underbrace{C}_{s(t_0)}\cdot\underbrace{\int_{t_a}^{t_b}\delta(t-t_0)\,\mathrm{d}t}_{1;\ \text{pokud } t_0\in(t_a,t_b)} =$$

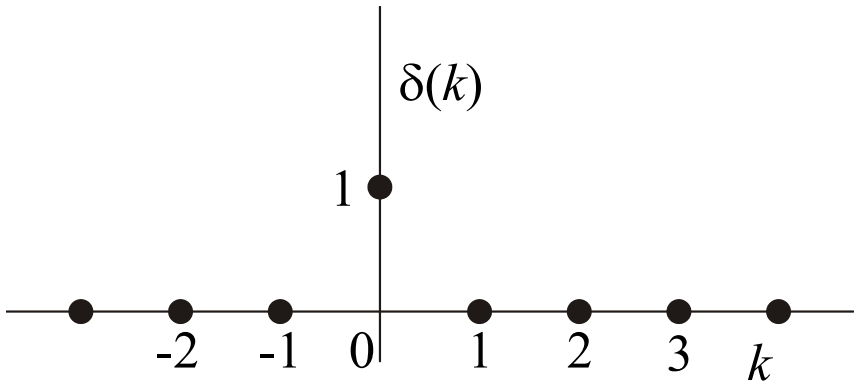
$$= s(t_0)\ ;\ \text{pokud } t_0\in(t_a,t_b)$$



Jednotkový impuls

Obdoba Diracova impulsu pro signály v diskrétním čase

$$\delta(k) = \begin{cases} 1; & k = 0 \\ 0; & \text{jinde} \end{cases}$$



Vzorkovací vlastnost

$$\sum_{a}^{b} s(k) \cdot \delta(k - k_0) = s(k_0); \text{ pokud } k \in \{a, \ldots, b\}$$

Vzorkovací funkce

$$\mathrm{Sa}(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin(t)}{t}; & t \neq 0 \\ 1; & t = 0 \end{cases}$$

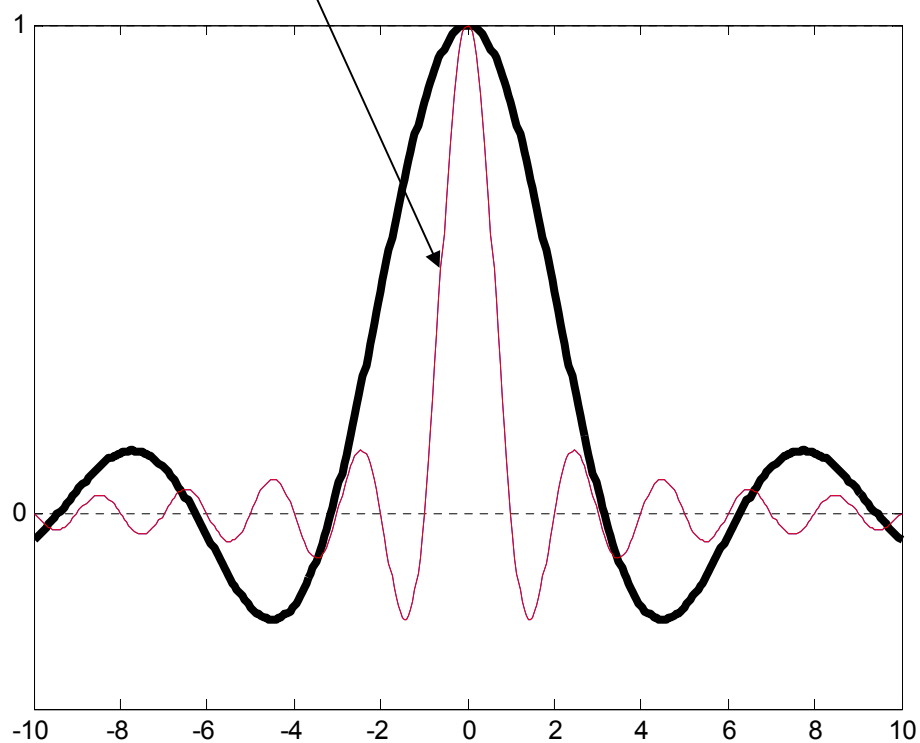
$$\mathrm{sinc}(t) = \mathrm{Sa}(t)$$ (častější definice)

$$\mathrm{sinc}(t) = \mathrm{Sa}(\pi t)$$ (používá matlab)

$$\int \mathrm{Sa}(t)\,\mathrm{d}t$$ analyticky neřešitelný

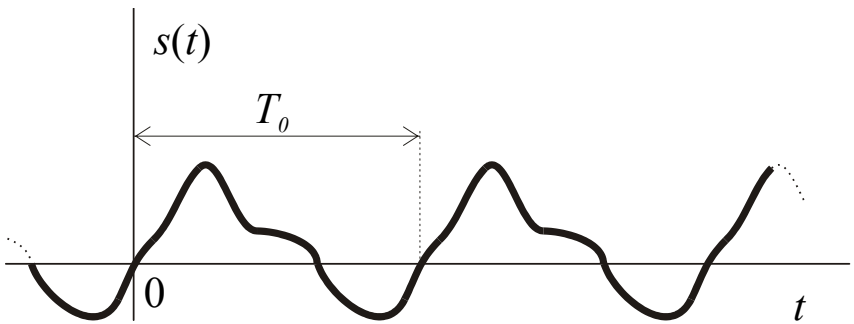
$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Sa}(t)\,\mathrm{d}t = \pi$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Sa}^2(t)\,\mathrm{d}t = \pi$$

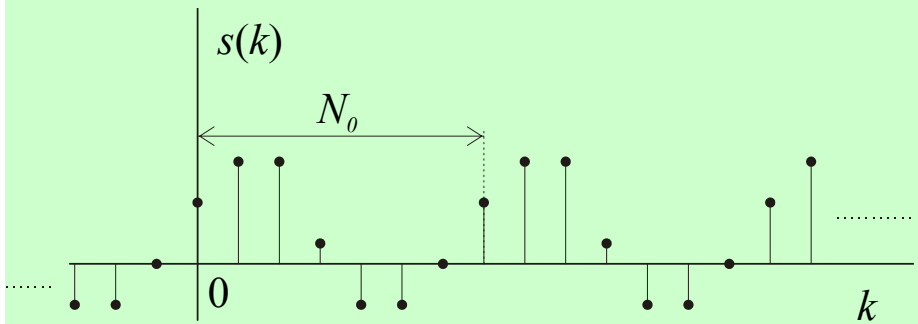


Periodický signál

$$s(t) = s(t + m \cdot T_0); \quad \forall t \in R, \ \forall m \in Z$$



$$s(k) = s(k + m \cdot N_0); \quad \forall k \in Z, \ \forall m \in Z$$



- *T0*>0, *N0*>0 – perioda
- nejmenší perioda
- Součet, rozdíl, součin, podíl periodických signálů se shodnou periodou je opět periodický signál.
- Integrál přes celistvý počet period signálu nezávisí na volbě počátku integračního intervalu.

$$\int_0^{mT_0} s(t)\,\mathrm{d}t = \int_X^{X+mT_0} s(t)\,\mathrm{d}t; \quad \forall X \in \mathbf{R}, \ m \in \mathbf{Z}$$

$$\sum_{k=0}^{m \cdot N_0} s(k) = \sum_{k=X}^{X+m \cdot N_0} s(k); \quad \forall X \in \mathbf{Z}, \ m \in \mathbf{Z}$$

Periodický signál

- Vždy signál výkonový
- Střední hodnotu lze počítat přes periodu (nebo celistvý počet period) →týká se operátoru Av[ ] a výrazů využívajících Av[ ] (P, R(τ), ...)

$$\mathrm{Av}\left[s(t)\right] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} s(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{2mT_0+2\nu}\int_{-mT_0-\nu}^{mT_0+\nu} s(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \underbrace{\lim_{m\to\infty}\frac{1}{2mT_0+2\nu}\int_{-mT_0-\nu}^{-mT_0} s(t)\,\mathrm{d}t}_{\to 0} + \lim_{m\to\infty}\frac{1}{2mT_0+2\nu}\int_{-mT_0}^{mT_0} s(t)\,\mathrm{d}t + \underbrace{\lim_{m\to\infty}\frac{1}{2mT_0+2\nu}\int_{mT_0}^{mT_0+\nu} s(t)\,\mathrm{d}t}_{\to 0} =$$

$$= \lim_{m\to\infty}\frac{1}{2mT_0+2\nu}\int_{-mT_0}^{mT_0} s(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{2mT_0}\int_{-mT_0}^{mT_0} s(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T_0}\int_{(T_0)} s(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\boxed{\mathrm{Av}\left[s(t)\right] = \frac{1}{T_0}\int_{(T_0)} s(t)\,\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{\mathrm{Av}\left[s(k)\right] = \frac{1}{N_0}\sum_{k=k_0}^{k_0+N_0-1} s(k)}$$

Periodický signál

$$\mathrm{Av}\left[s(t)\right] = \frac{1}{T_0}\int_{(T_0)} s(t)\,\mathrm{d}t$$

$$P = \mathrm{Av}\left[\left|s(t)\right|^2\right] = \frac{1}{T_0}\int_{(T_0)} \left|s(t)\right|^2\,\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{R}_{12}(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{(T_0)} s_1(t+\tau)\cdot s_2^{\,*}(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{Av}\left[s(k)\right] = \frac{1}{N_0}\sum_{k=k_0}^{k_0+N_0-1} s(k)$$

$$P = \mathrm{Av}\left[\left|s(k)\right|^2\right] = \frac{1}{N_0}\sum_{k=k_0}^{k_0+N_0-1} \left|s(k)\right|^2$$

$$\mathrm{R}_{12}(m) = \frac{1}{N_0}\sum_{k=k_0}^{k_0+N_0-1} s_1(k+m)\cdot s_2^{\,*}(k)$$

Harmonický signál

- Reálný harmonický signál

$$s(t) = A \cdot \cos(\omega t + \theta)$$

$$s(k) = A \cdot \cos(\Omega k + \theta)$$

- Komplexní harmonický signál

$$s(t) = Ae^{j(\omega t + \theta)} = A\cos(\omega t + \theta) + jA\sin(\omega t + \theta)$$

$$s(k) = Ae^{j(\Omega k + \theta)} = A\cos(\Omega k + \theta) + jA\sin(\Omega k + \theta)$$

- Spojitý čas:
  - Speciální případ periodického signálu
  - Kmitočet f [Hz]
  - Perioda $T_0 = 1/f$ [s]
  - Úhlový kmitočet $\omega = 2\pi f$ [rad/s]
- Diskrétní čas:
  - Nemusí být periodický
  - Kmitočet F [-] (nebo [1/vzorek])
  - Perioda $N_0 = 1/F$ [-] (nebo [vzorek])
  - Úhlový kmitočet $\Omega = 2\pi F$ [rad] (nebo [rad/vzorek])

Harmonický signál

- Předpokládáme $\omega \neq 0$
- Stejnosměrná složka je nulová
- Výkon a autokorelační funkce reálného harm. signálu

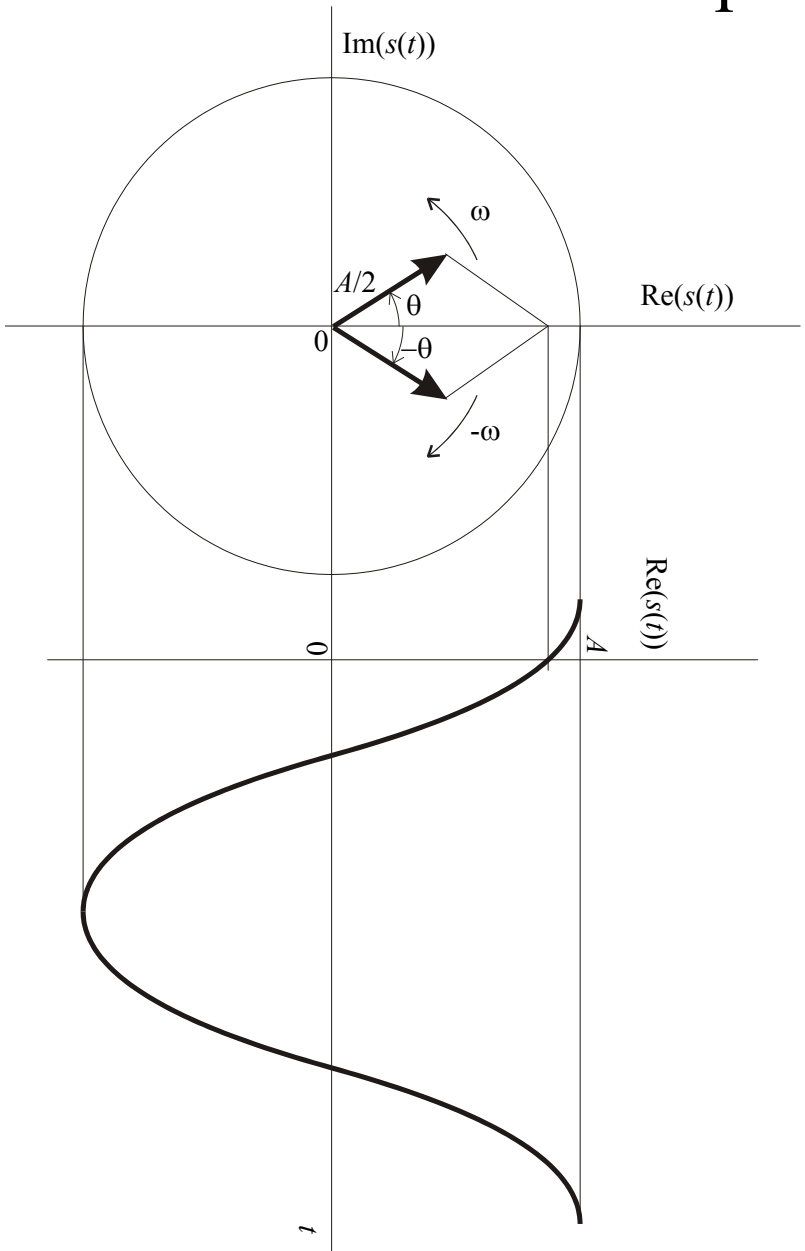
$$P = \mathrm{Av}\left[\left(A\cos\left(\omega t + \theta\right)\right)^2\right] = \frac{A^2}{2} \qquad \mathrm{R}\left(\tau\right) = \frac{A^2}{2}\cos\left(\omega t\right)$$

- Výkon a autokorelační funkce komplexního harm. signálu

$$P = \mathrm{Av}\left[\left|Ae^{j(\omega t+\theta)}\right|^2\right] = \mathrm{Av}\left[A^2 \cdot \underbrace{\left|e^{j(\omega t+\theta)}\right|^2}_{1}\right] = A^2 \qquad \mathrm{R}\left(\tau\right) = A^2 e^{j\omega t}$$

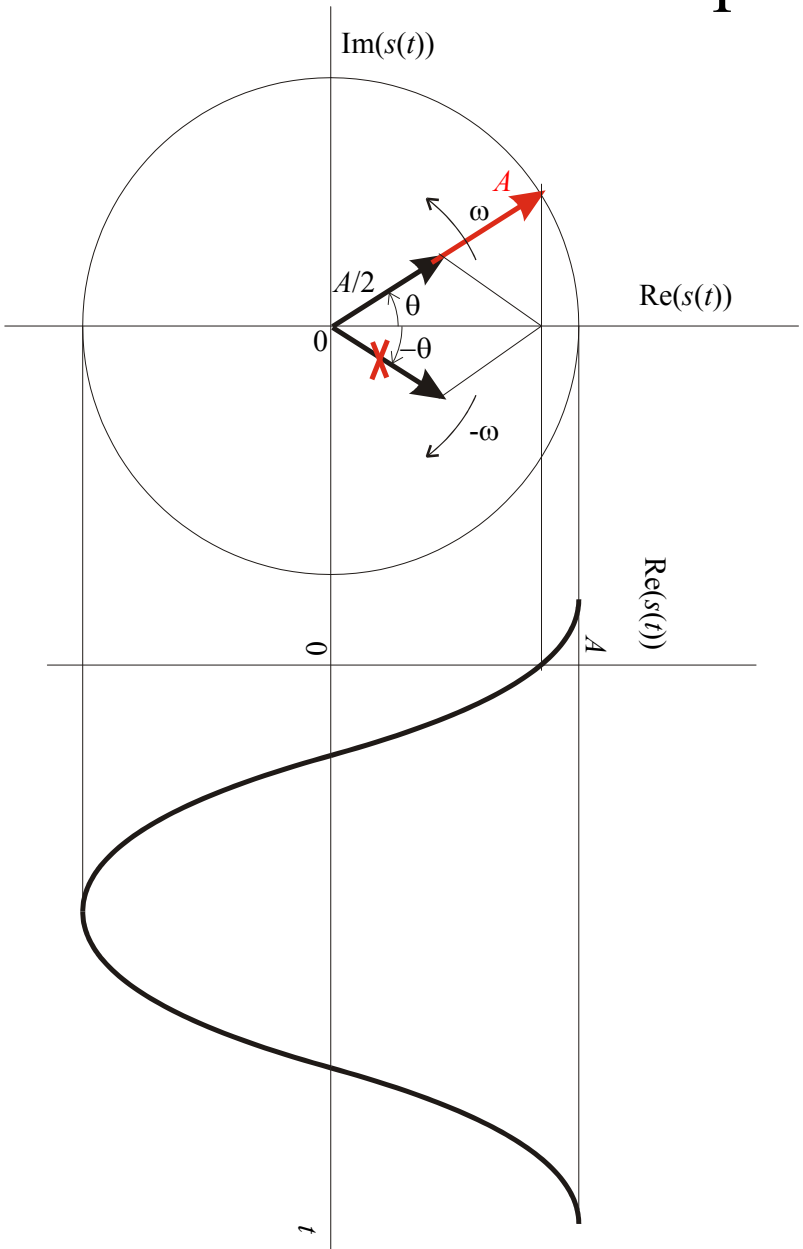
Autokorelační funkce nezávisí na fázi signálu

Harmonický signál - vzájemný vztah reálného a komplexního signálu



$$A\cos\left(\omega t+\theta\right)=\frac{A}{2}\left(e^{j\left(\omega t+\theta\right)}+e^{j\left(-\omega t-\theta\right)}\right)$$

Harmonický signál - vzájemný vztah reálného a komplexního signálu



$$A\cos\left(\omega t+\theta\right)=\frac{A}{2}\left(e^{j(\omega t+\theta)}+e^{j(-\omega t-\theta)}\right)$$

$$A\cos\left(\omega t+\theta\right)=\mathrm{Re}\left(Ae^{j(\omega t+\theta)}\right)$$